

TRABAJO FIN DE GRADO

Estudio de la actividad mínima detectable en un espectrómetro gamma de Ge (Li)

Grado en física

Autor: Jorge Luna Duarte

Director: Eduardo García Abancéns

Departamento de Física Teórica

Área de Física Atómica, Molecular y Nuclear

Curso 2016/2017

Junio 2017

Índice

1. Introducción	1
2. Dispositivo experimental	2
2.1. Detector	2
2.2. Cadena electrónica.....	2
2.3. Calibración en energía.....	3
2.4. Caracterización del detector	5
2.4.1. Eficiencia	5
2.4.2. Resolución.....	6
3. Estimación de áreas y límites	7
3.1. Estimación del fondo radiactivo.	7
3.2. Límites para la detección.....	8
3.3. Estimación de actividades	10
4. Análisis de datos	12
4.1. Comparación de métodos.....	12
4.2. Dependencia de condiciones experimentales.....	14
4.2.1. Actividad variable	14
4.2.2. Tiempo variable	16
4.2.3. Fondo radiactivo variable.....	18
5. Conclusiones	20
6. Referencias	21

1. Introducción

El objetivo de este trabajo es el estudio de la actividad mínima detectable (*MDA*) de un espectrómetro gamma de Ge (Li) convencional. Para ello se ha utilizado un detector del laboratorio de Física Nuclear con el que se han realizado medidas del fondo radiactivo y medidas con fuentes radiactivas de distinta intensidad.

Se compararán varios algoritmos mediante los que se van a estimar las áreas de los picos radiactivos y determinar los límites crítico, superior y de detección, además de la actividad mínima detectable y su dependencia con el tiempo y con el fondo radiactivo.

El trabajo está organizado de la siguiente forma:

En la sección 2 se describe el montaje experimental utilizado: el detector y su cadena electrónica. A continuación, explicamos la calibración en energía del detector y, por último, caracterizamos el detector haciendo su calibración tanto de la eficiencia como de la resolución en función de la energía. Para todo ello, se utilizan fuentes radiactivas de ^{22}Na , ^{60}Co y ^{137}Cs .

En la sección 3 se explican sencillos aspectos estadísticos relacionados con la estimación de áreas en espectrometría y se introducen los conceptos de los límites crítico, de detección y superior, así como los distintos algoritmos que utilizaremos para la estimación del fondo radiactivo y de la actividad mínima detectable.

En la sección 4 se presentan las medidas realizadas en el laboratorio, el análisis de los datos y los valores obtenidos para límites, áreas, actividades y actividades mínimas detectables en los distintos casos considerados. Se comparan los resultados obtenidos mediante los diferentes métodos y se estudia la dependencia del tiempo, de la actividad y del fondo radiactivo.

Finalmente se presentan las conclusiones del trabajo y alguna de las posibles continuaciones del mismo.

2. Dispositivo experimental

2.1. Detector

El detector utilizado es un semiconductor de Ge(Li) (véase la figura 1). Se trata de una unión PN de germanio en la que se ha difundido litio para compensar las impurezas del cristal y así aumentar la longitud de la zona de transición (que es inversamente proporcional a la concentración neta de impurezas). Su forma es cilíndrica, siendo tanto su altura como su diámetro de 5,34 cm. El volumen activo del detector es de $119,6 \text{ cm}^3$ que corresponde a una masa efectiva del detector de 636 g.

Este tipo de detectores [1], hoy en día sustituidos por los germanios hiperpuros (HPGe), requieren mantenerlos a la temperatura del nitrógeno líquido (77 K), no solo mientras se está utilizando sino de forma permanente para evitar que el litio se desdifunda. En el detector utilizado, el litio se ha desdifundido parcialmente a lo largo de los años, por lo que sus prestaciones en resolución son un orden de magnitud peor que lo habitual. En la actualidad, su resolución a una energía de 1332 keV es de 22 keV, mientras que originalmente era de 2 keV.



Fig. 1. Detector de Ge(Li) con el dewar de nitrógeno líquido y la cadena electrónica utilizada.

2.2. Cadena electrónica

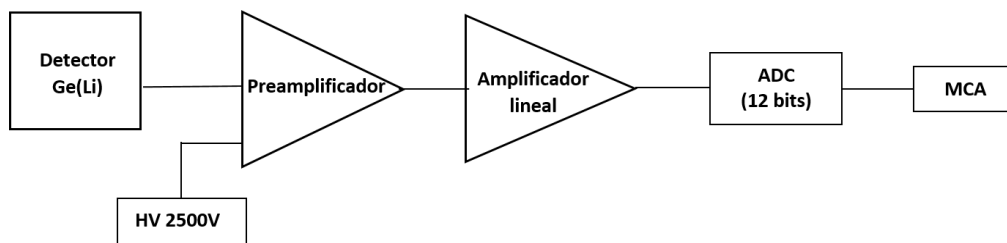


Fig. 2. Cadena electrónica.

La cadena electrónica utilizada para el procesamiento de las señales y la adquisición de datos (véase la figura 2) consiste en una fuente de tensión que suministra una alimentación de 2500V para polarizar el detector, un preamplificador muy próximo al

detector para reducir la entrada de ruido electrónico y adaptar la impedancia de salida a la cadena electrónica, un amplificador lineal cuya ganancia es ajustable, un convertidor analógico-digital (ADC) de 12 bits que transforma la amplitud del pulso en un número binario entre 0 y 4095 que denominaremos canal y, por último, un analizador multicanal (MCA) que construye un espectro diferencial donde en el eje x se representa el canal, que es proporcional a la energía depositada en el detector, y en el eje y el número de sucesos/canal (véase como ejemplo la figura 3).

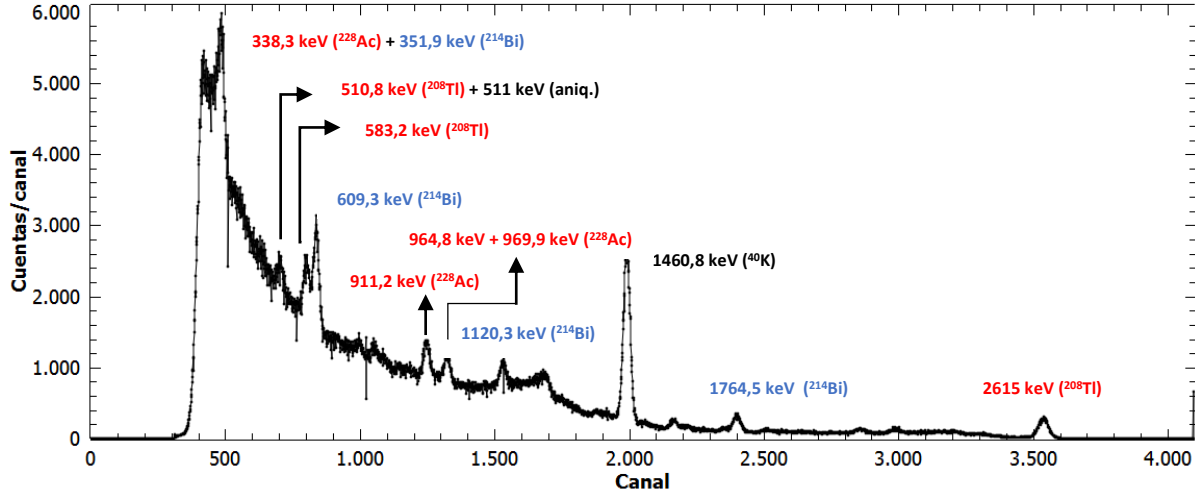


Fig. 3. Espectro diferencial de una medida de fondo ($t=74858$ s). Se indica el origen y la energía de los picos más significativos del fondo que provienen de las cadenas radiactivas del ^{232}Th (rojo) y ^{238}U (azul), así como del ^{40}K (negro).

2.3. Calibración en energía

La espectroscopía gamma está basada en que los fotones monoenergéticos característicos de la desintegración de un determinado isótopo radiactivo, cuando son completamente absorbidos en el detector, producen un pico gaussiano en el espectro diferencial que permite identificar la presencia de dicho isótopo.

Para identificar la energía asociada a dichos picos y, por tanto, el isótopo del que son originarios, es necesario calibrar el espectro en energía. Para realizar esta calibración dispondremos de 5 picos, uno proveniente de una fuente radiactiva de ^{137}Cs con energía de 661,6 keV, dos de ^{60}Co con energías de 1173,2 keV y de 1332,5 keV y dos de ^{22}Na con energías de 511,0 keV y de 1274,5 keV (véase ref [2]). De cada uno de ellos estimamos el centro del pico (c_0), el área (S), y la anchura a media altura (Γ) con sus correspondientes errores. Es necesario realizar este ajuste de nuevo cada vez que cambien condiciones experimentales como la ganancia o el voltaje aplicado. La calibración viene dada por un ajuste lineal de la forma:

$$\text{canal} = a \cdot E + b$$

Mediante un ajuste por mínimos cuadrados se determinan los parámetros a y b , que relacionan el canal del ADC con la energía del pico, sus respectivos errores y su covarianza. Así, por ejemplo, en la calibración de la medida de fondo de la figura 3, cuyo

ajuste y diagrama de residuos se muestran en las figuras 4 y 5, respectivamente, se obtienen los siguientes valores: $a = 1,37914 \pm 0,00013 \left(\frac{\text{canal}}{\text{keV}} \right)$, $b = 18,01 \pm 0,15 \text{ canal}$, $\text{Cov}(a, b) = -2,014 \cdot 10^{-5} \text{ canal}^2 \text{ keV}^{-1}$

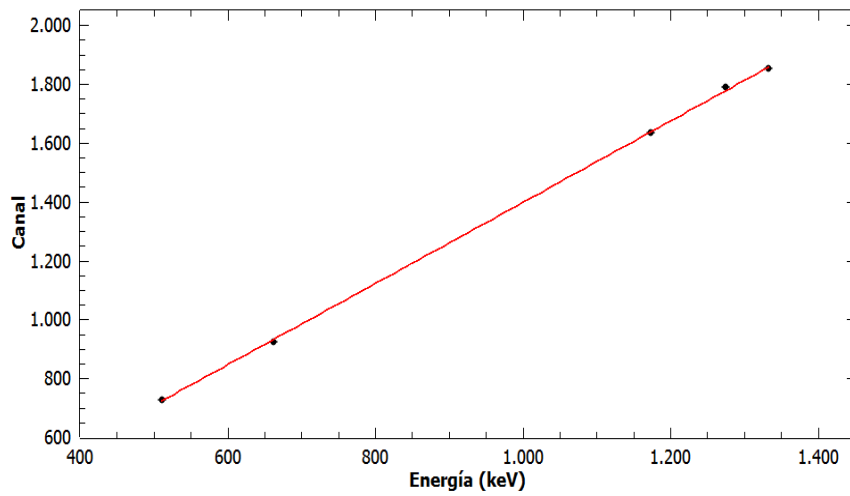


Fig. 4. Calibración en energía del espectro de fondo de la Fig. 3 utilizando las fuentes de calibración citadas en el trabajo.

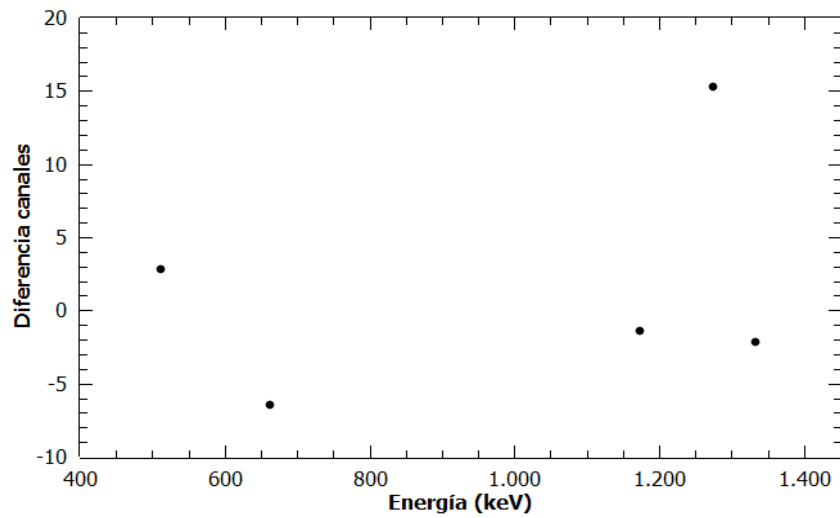


Fig. 5. Diagrama de residuos de la calibración de energía de la Fig.4.

2.4. Caracterización del detector

En este apartado vamos a explicar brevemente dos propiedades básicas que caracterizan la respuesta de un detector: la eficiencia y la resolución (véase ref [1]).

2.4.1. Eficiencia

La eficiencia es una propiedad que depende del detector, del tipo de partícula y de la energía de la radiación. Podemos diferenciar dos tipos de eficiencia: absoluta e intrínseca. La **eficiencia absoluta** (ε_{abs}) se define como el cociente entre el número de partículas que detectamos y el número de partículas emitidas por la fuente, por lo que, no solamente depende de las propiedades del detector sino también de la geometría detector-fuente. Por otro lado, la **eficiencia intrínseca** (ε_{int}) es el cociente entre el número de partículas detectadas y el número de partículas que inciden sobre el detector. Para fuentes radiactivas isótropas ambas eficiencias se pueden relacionar de la forma: $\varepsilon_{int} = \varepsilon_{abs} \left(\frac{4\pi}{\Omega} \right)$, siendo Ω el ángulo sólido del detector visto desde la fuente. Para todas las medidas que se han realizado en este trabajo, las fuentes eran puntuales e isótropas y se encontraban a 25 cm del extremo del detector en la dirección de su eje. Así, el valor del ángulo sólido subtendido será: $\Omega = 0,0355 \text{ srad}$.

Como solamente vamos a identificar los fotones que depositan toda su energía en el detector hablaremos de eficiencia (absoluta o intrínseca) de pico. Por lo tanto, la eficiencia intrínseca de pico se relaciona con la actividad A de una muestra radiactiva por la expresión:

$$\varepsilon_{int.pico} = \frac{S}{t \cdot I \cdot A \cdot \frac{\Omega}{4\pi}} \quad (1)$$

donde S es el área del pico, t es el tiempo de medida e I es el número de veces que se emite la partícula por cada desintegración del isótopo.

Con las tres fuentes radiactivas (^{137}Cs , ^{60}Co y ^{22}Na) hemos realizado una calibración en eficiencia utilizando cuatro de los cinco picos, no teniendo en cuenta el de 511 keV del ^{22}Na , ya que se trata de un pico de aniquilación al que pueden contribuir fotones que no provengan de la fuente radiactiva. La dependencia de la eficiencia intrínseca de pico (en adelante, eficiencia ε) con la energía suele expresarse como:

$$\ln(\varepsilon) = a' \ln(E) + b' \quad (2)$$

El ajuste por mínimos cuadrados a una recta con la energía expresada en keV (ver figura 6), da los siguientes valores: $a' = -0,691 \pm 0,030$, $b' = 2,71 \pm 0,21$, $Cov(a', b') = -0,006169$ y $\chi^2/dof = 90,07$.

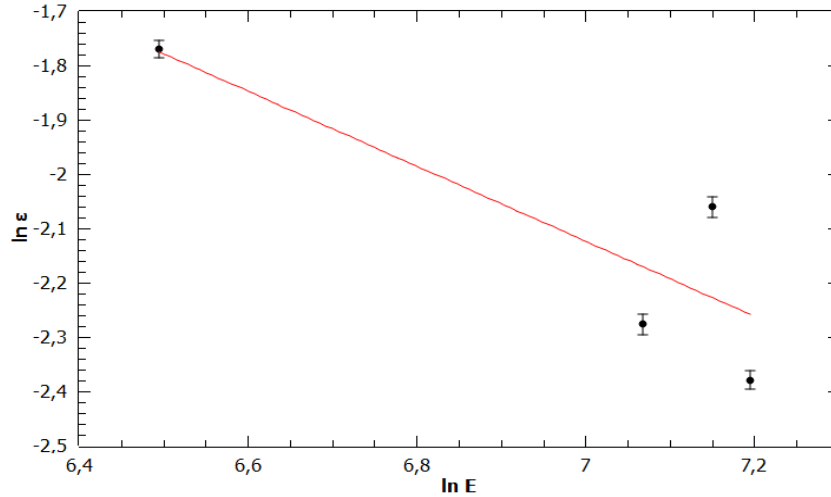


Fig. 6. Calibración en eficiencia intrínseca de pico del detector.

2.4.2. Resolución

La resolución de un detector, definida como la anchura a altura mitad (Γ), caracteriza la capacidad de un detector para resolver dos picos muy próximos en energía. Para picos gaussianos, se cumple que $\Gamma = 2,35\sigma$, siendo σ la desviación estándar de esta distribución.

Realizaremos la calibración en resolución utilizando los mismos cuatro picos que para la calibración en eficiencia. La dependencia de la resolución con la energía la podemos expresar como:

$$\Gamma^2(\text{keV}^2) = a'' \cdot E + b'' \quad (3)$$

Al realizar el ajuste por mínimos cuadrados (ver figura 7) obtenemos: $a'' = 0,080 \pm 0,014 \text{ keV}$, $b' = 268 \pm 15 \text{ keV}^2$, $\text{Cov}(a', b') = -0,1994 \text{ keV}^3$ y $\chi^2/\text{doF} = 1,84$.

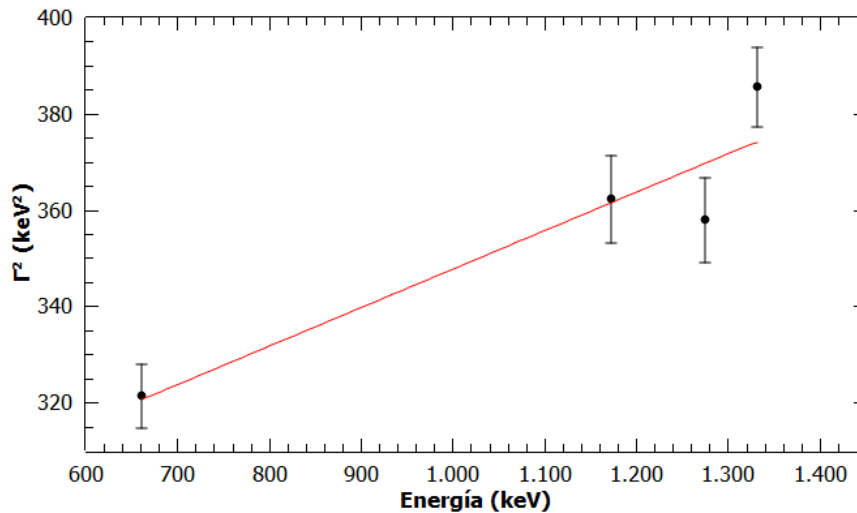


Fig. 7. Calibración en resolución (Γ) del detector.

3. Estimación de áreas y límites

El objetivo de este trabajo será buscar una señal pequeña de un isótopo dado, es decir, buscar un pico gaussiano de área pequeña en un espectro de fondo. Para ello, determinaremos la posición central del pico (c_o) mediante la calibración en energía obtenida en sus condiciones experimentales, la eficiencia del detector (ε) a dicha energía mediante (2) y la resolución del detector a dicha energía a partir de (3). Abriremos una ventana central (o región de interés) en torno a esa posición c_o de $\pm 1,4\sigma$ porque es la ventana óptima que maximiza el cociente señal/ruido para picos gaussianos cuando la señal es muy pequeña. (Véase ref [3])

La suma de todos los sucesos en dicha ventana la denotaremos por G :

$$G = \sum_{i=c_o-1,4\sigma}^{c_o+1,4\sigma} C_i$$

siendo C_i el número de cuentas registradas en cada canal. En el caso de los canales de los extremos, en los que solo entrará una fracción de ellos, reescalaremos el número de cuentas proporcionalmente.

El área neta de la señal N la podemos determinar como la diferencia entre el número total de cuentas en la ventana G y las cuentas B en dicha ventana atribuibles al fondo: $N = G - B$

Las desintegraciones radiactivas obedecen a la estadística de Poisson que para un número de sucesos mayor que 10 se puede aproximar por una distribución gaussiana con varianza igual al valor de dicho parámetro. Por lo tanto:

$$Var(N) = Var(G) + Var(B) = G + Var(B) = N + B + Var(B)$$

3.1. Estimación del fondo radiactivo

Usaremos dos sencillos algoritmos para determinar el fondo radiactivo B en la región de interés.

El primer algoritmo (**método 1**) se utiliza cuando se dispone de una medida de fondo radiactivo sin presencia del isótopo buscado además del espectro en el que buscamos la señal. Estimaremos B directamente usando en la medida de fondo la misma ventana de $\pm 1,4\sigma$ que usamos para determinar el número de cuentas totales (G). Por tanto, tendremos que $Var(B) = B \frac{t}{t_F}$ donde t es el tiempo de la medida en que buscamos la señal y t_F el de la medida de fondo. En el caso particular en el que las dos medidas sean prácticamente del mismo tiempo, como será nuestro caso, $Var(B) \approx B$.

El segundo de los algoritmos (**método 2**) se usa cuando no se dispone de una medida específica del fondo. Para estimar B , abrimos una ventana tanto a la izquierda como a la derecha de la región de interés de igual anchura (por ej. $0,5\sigma$) y suficientemente

alejada del centro del pico para que la contribución de la señal sea despreciable (por ej. a $2,5\sigma$). Este fondo B vendrá dado por la expresión:

$$B = \frac{n}{2m} \left(\sum_{i=c_0-3\sigma}^{c_0-2,5\sigma} C_i + \sum_{i=c_0+2,5\sigma}^{c_0+3\sigma} C_i \right) \quad (4)$$

El factor $n/2m$ escala el fondo estimado de las ventanas laterales a la ventana central, siendo n el número de canales en la ventana central y m el número de canales en cada una de las ventanas laterales. En este caso: $Var(B) = B \frac{n}{2m}$

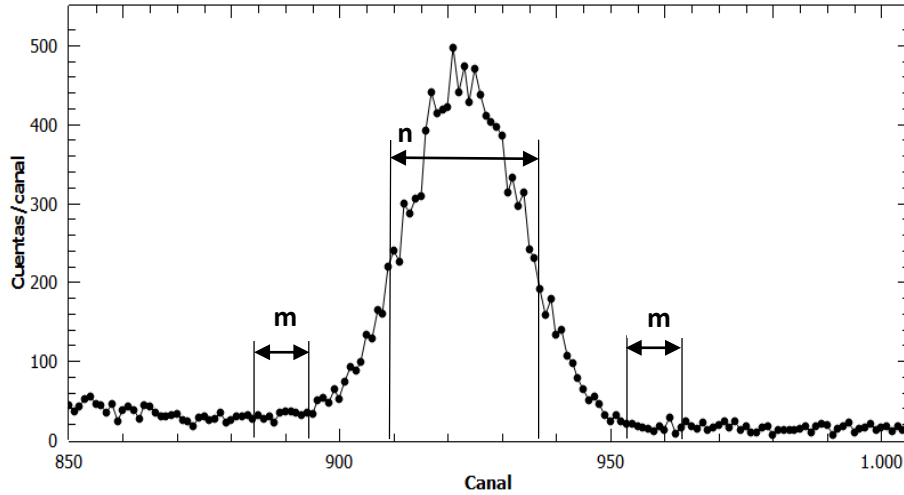


Fig. 8. Ilustración del método 2 (véase texto) aplicado a un pico claramente visible en el espectro.

Para estudiar la dependencia de la estimación del fondo con la anchura de las ventanas usadas para su estimación, además de utilizar la ventana de $0,5\sigma$ de anchura (expresión (4)), hemos utilizado ventanas laterales de 1σ ($2,5\sigma$ - $3,5\sigma$) de anchura y de $1,5\sigma$ ($2,5\sigma$ - 4σ) de anchura.

3.2. Límites para la detección

Para decidir si hay señal, es decir, si hay pico o no, utilizaremos el **límite crítico** (L_C). Éste nos indica si el número de cuentas observado N en una determinada medida es significativo, es decir, si dicho valor se desvía un cierto número de desviaciones estándar del valor esperado ($N=0$) en ausencia de señal. Este límite viene dado por

$$L_C = k_\alpha \sigma_0$$

donde σ_0 es la desviación estándar de la distribución cuando el valor de N es 0 y k_α es el nivel de confianza con el que damos el resultado. En nuestro caso, usaremos un nivel de confianza del 95% ($k_\alpha = 1,645$), teniendo en cuenta que los valores mayores a L_C representarán el 5% restante. ($L_C = 1,645 \sigma_0$).

Para determinar el valor de σ_0 tenemos en cuenta que $Var(N=0) = \sigma_0^2 = B + Var(B)$

Si elegimos el método 1, la varianza será $\sigma_0^2 = 2B$; en cambio, si elegimos el método 2 será $\sigma_0^2 = B \left(1 + \frac{n}{2m}\right)$. Los límites críticos para ambos métodos vienen dados, respectivamente, por:

$$L_C = 1,645\sqrt{2B} \qquad L_C = 1,645\sqrt{B \left(1 + \frac{n}{2m}\right)}$$

Obviamente ambas expresiones son iguales para el caso en el que $n=2m$.

El **límite de detección** (L_D) nos da el valor mínimo que tiene que tener la señal para que podamos estar confiados en detectarla (que el valor que obtengamos para N supere a L_C) con un cierto nivel de confianza (véase figura 9). El límite de detección se expresa como:

$$L_D = L_C + k_\beta \sigma_D.$$

Ambos valores de k representan la incertidumbre asociada. En nuestro caso, tomaremos para ambos el valor 1,645, teniendo un 95% de nivel de confianza ($k_\alpha = k_\beta = k = 1,645$). De esta forma se llega fácilmente [4] a que $L_D = k_\alpha^2 + 2k_\alpha \sigma_0 = k^2 + 2L_C$ o lo que es lo mismo a

$$L_D = 1,645^2 + 2 \cdot 1,645\sqrt{2B} \qquad L_D = 1,645^2 + 2 \cdot 1,645\sqrt{B \left(1 + \frac{n}{2m}\right)}$$

para los dos métodos de estimación del fondo.

Tanto el valor de L_C como de L_D dependen de la medida de fondo y del nivel de confianza que le queramos dar.

Al realizar la medida de una muestra podemos encontrarnos que $N > L_C$, en cuyo caso concluiremos que hay señal. El valor de esta señal con su respectivo error para ambos métodos vendrá dado por:

$$N \pm \sqrt{N + 2B} \qquad N \pm \sqrt{N + B \left(1 + \frac{n}{2m}\right)}$$

Por el contrario, puede ocurrir que $N < L_C$ en cuyo caso, como el número de cuentas no es estadísticamente significativo debemos concluir que no hemos visto la señal, pudiendo definir el **límite superior** (L_U) como el máximo número de cuentas que es razonable estadísticamente con el hecho de que no la hayamos observado.

Podemos determinar el límite superior como:

$$L_U = N + k_\alpha \sigma_N$$

donde σ_N es la incertidumbre del valor de la medida, k_α es el nivel de confianza, que vamos a seguir tomando $k_\alpha = 1,645$ y N el número de cuentas netas.

En ocasiones puede ocurrir que el valor de N sea negativo. Esto es estadísticamente razonable, sin embargo, no representa ninguna situación real, por lo que, en ese caso consideraremos $N=0$ porque no tenemos ningún interés en subestimar el valor de L_U . Para ambos métodos, podemos determinar el límite superior como:

$$L_U = N + 1,645\sqrt{2B} \qquad L_U = N + 1,645\sqrt{N + B\left(1 + \frac{n}{2m}\right)}$$

Para más detalles sobre los conceptos de límite crítico, límite de detección y límite superior véase las referencias [4], [5].

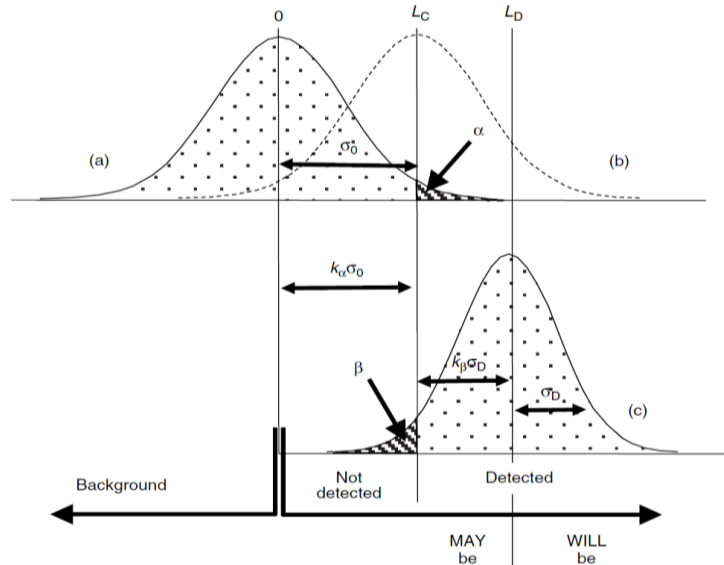


Fig. 9. Representación gráfica de los límites crítico y de detección. Extraída de [4].

3.3. Estimación de actividades

A partir del número neto de cuentas N o del límite superior L_U , podemos determinar la actividad correspondiente (A) o un límite superior de la actividad (L_A) sin más que usar la expresión (1). Debemos tener en cuenta que nuestros valores de cuentas se refieren a una ventana de $\pm 1,4\sigma$ que contiene solo el 83,85% del área de un pico gaussiano, por lo que, el área del pico es $S = \frac{N}{0,8385}$. Así, obtenemos:

$$A = \frac{4\pi N}{0,8385 \varepsilon I t \Omega} \quad L_A = \frac{4 \pi L_U}{0,8385 \varepsilon I t \Omega}$$

De forma análoga, utilizando el límite de detección podemos estimar la **actividad mínima detectable** (siglas en inglés, **MDA**) de nuestro dispositivo como:

$$MDA = \frac{4 \pi L_D}{0.8385 \varepsilon I t \Omega}$$

Si se quiere tener en cuenta la incertidumbre asociada a los parámetros que aparecen en el factor de conversión de los límites en cuentas (L_U y L_C) a los límites en unidades de actividades (L_A y MDA), hay que introducir un factor que denotaremos por f y viene dado por:

$$f = \left(1 - k^2 \frac{\sigma_v^2}{v^2}\right)$$

siendo $\nu = \varepsilon I t \Omega$ y σ_ν su correspondiente error. De esta forma el límite superior a la actividad y la MDA se expresan como:

$$L_A = \frac{4\pi L_U}{0,8385 \nu f} \quad MDA = \frac{4\pi L_D}{0,8385 \nu f}$$

Esto constituye el denominado estándar ISO 11929. Extraída de [6], [7] y [8].

El hecho de que el factor f esté en el denominador, hará que las expresiones anteriores diverjan cuando $f = 0$. En nuestro caso, en el que $k = 1,645$, el punto en el que divergen es el que corresponde con que el error relativo es aproximadamente del 60%.

La figura 10 muestra un ejemplo de cómo varía la MDA en función del error relativo σ_ν/ν . Puede verse que la incertidumbre en ν solo afecta apreciablemente a la MDA para errores relativos mayores del 30-40%. Para errores sistemáticos del 20-30%, este método nos proporciona una pequeña corrección con respecto a los valores obtenidos sin tenerlo en cuenta. Sin embargo, para errores menores que el 10%, la corrección es prácticamente despreciable.

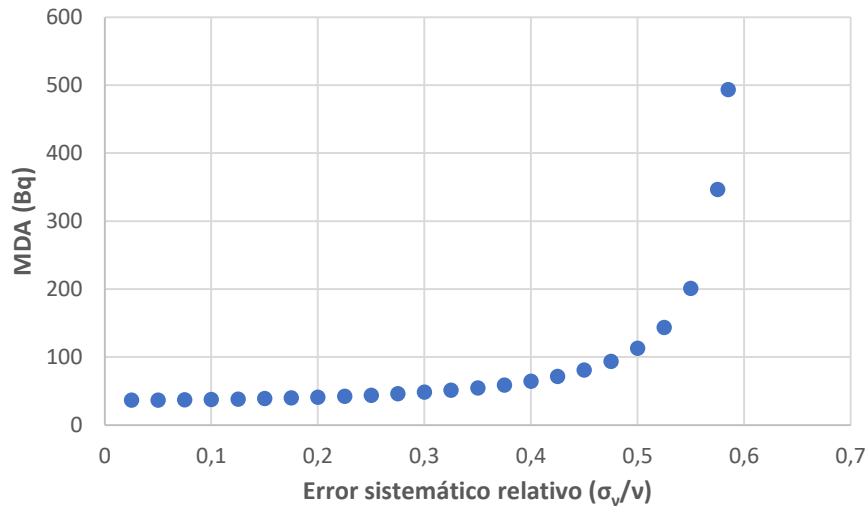


Fig. 10. Ejemplo de estimación de la MDA en función del error sistemático relativo (σ_ν/ν) donde $\nu = \varepsilon I t \Omega$.

En la estimación del error de ν , consideraremos despreciables los errores asociados al tiempo de medida t y al ángulo sólido Ω ; el error de la intensidad lo obtendremos de [2], según el isótopo y el pico estudiados, y el error en la eficiencia lo estimaremos mediante propagación de errores de la calibración en eficiencia (expresión (2)). No hemos considerado posibles errores sistemáticos asociados a estas magnitudes. Con estas consideraciones, como se verá más adelante, en nuestro caso, el error relativo en ν es apenas del 4%.

4. Análisis de datos

Para las medidas se ha utilizado una fuente radiactiva de ^{137}Cs . El ^{137}Cs emite fotones de 661,6 keV el 85,1% de sus desintegraciones ($I = 0,851 \pm 0,2$). Como conocemos el valor de la energía del pico de ^{137}Cs , a partir de las calibraciones anteriores podemos determinar la posición del pico (c_0), la anchura a media altura (Γ) y la eficiencia (ε), cuyos valores son: $c_0 = 930,53 \pm 0,17 \text{ canal}$, $\Gamma = 17,91 \pm 0,19 \text{ keV}$ y $\varepsilon = 0,1690 \pm 0,0075$. Lo único que va a variar si cambian las condiciones experimentales es el centro del pico, tanto eficiencia como anchura a media altura van a ser los mismos valores durante todo el trabajo. Estos valores podrían haberse obtenido directamente de la calibración de ^{137}Cs , pero, para generalizar el método a la búsqueda de isótopos de los que no se dispone de una fuente radiactiva hemos usado las correspondientes calibraciones. En la figura 11 se muestra la zona de estudio para la búsqueda del pico de ^{137}Cs , así como la ventana central y las ventanas laterales de anchura $0,5\sigma$ que van desde $2,5\sigma$ hasta 3σ con respecto al centro estimado c_0 del pico de ^{137}Cs .

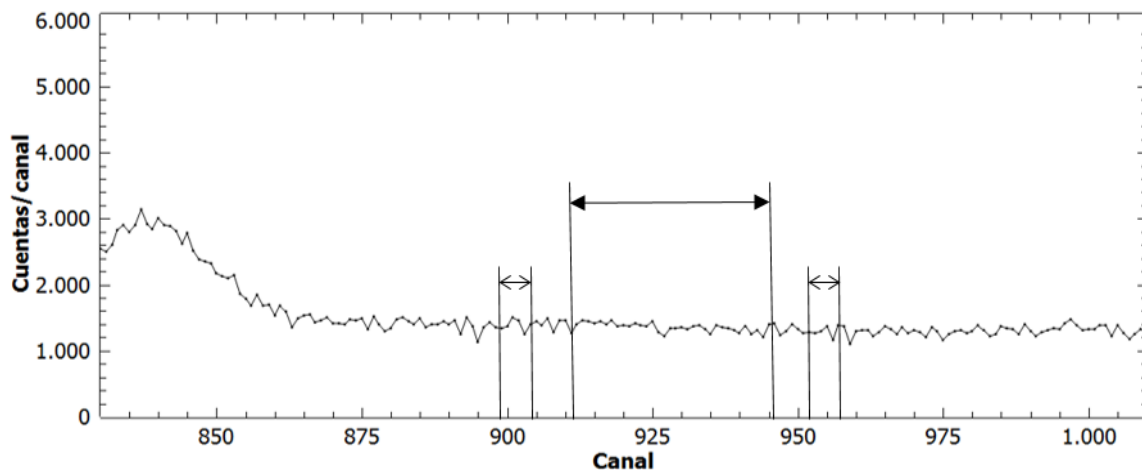


Figura 11. Detalle de la región de interés para la búsqueda del pico de ^{137}Cs del espectro de fondo de la figura 3. Se muestran también las ventanas laterales de $0,5\sigma$ de anchura usadas para estimar el fondo B.

4.1. Comparación de métodos

Al espectro de fondo de la figura 3 de aproximadamente 21 horas le hemos sumado un espectro de 10s (110s) obtenido con la fuente de ^{137}Cs de tal forma que hemos generado un espectro que equivale a haber tenido durante las 21 horas una fuente de ^{137}Cs de una actividad de 5,4 Bq (47,5 Bq). Con estos espectros, uno de una actividad equivalente muy pequeña y otro de una actividad equivalente de un orden de magnitud mayor, hemos comparado los distintos métodos de estimación de límites y actividades: el método 1, el método 2 con ventanas de fondo de anchura $0,5\sigma$, 1σ y $1,5\sigma$ y todos ellos incluyendo el error sistemático de $v = I \varepsilon t \Omega$. Los resultados obtenidos se muestran en las tablas 1 y 2.

Método	N (cuentas)	L _C (cuentas)	L _D (cuentas)	L _U (cuentas)	A (Bq)		MDA (Bq)	
					$\sigma_v = 0$	$\sigma_v \neq 0$	$\sigma_v = 0$	$\sigma_v \neq 0$
1	171	463,7	930,1	635,2	< 24,9	< 25,0	36,5	36,7
2 (0,5 σ)	579	635,9	1274,5	1216,1	< 47,7	< 47,9	50,0	50,2
2 (1 σ)	732	504,4	1011,5	-	29 \pm 10	29 \pm 10	39,6	39,9
2 (1,5 σ)	595	505,0	1012,7	-	23,3 \pm 9,1	23,3 \pm 9,2	35,7	35,8

Tabla 1. Resultados de la medida de $t \approx 21$ horas con una fuente de actividad equivalente a 5,4 Bq.

Método	N (cuentas)	L _C (cuentas)	L _D (cuentas)	A (Bq)		MDA (Bq)	
				$\sigma_v = 0$	$\sigma_v \neq 0$	$\sigma_v = 0$	$\sigma_v \neq 0$
1	1154	464,0	930,7	45,2 \pm 9,5	45,2 \pm 9,6	36,4	36,6
2 (0,5 σ)	1526	636,6	1276,0	60 \pm 13	60 \pm 13	50,0	50,2
2 (1 σ)	1676	453,5	909,7	66 \pm 11	66 \pm 11	39,6	39,9
2 (1,5 σ)	1540	454,0	910,7	60,3 \pm 9,5	60,3 \pm 9,6	35,7	35,8

Tabla 2. Resultados de la medida de $t \approx 21$ horas con una fuente de actividad equivalente a 47,5 Bq.

La mejor forma de determinar el fondo en la región de interés y, por tanto, la actividad es mediante el **método 1**. Sin embargo, tiene la desventaja de que no siempre se dispone de un espectro de fondo separado de la medida de la muestra, en cuyo caso tendríamos que utilizar el método 2. De las tres ventanas utilizadas con este método, en principio, lo más conveniente sería utilizar la de 0,5 σ , ya que es la que nos da más garantía de que no cogemos algún pico cercano. Como puede verse en nuestras tablas el método 2 nos está subestimando el fondo en la región de interés y consecuentemente sobreestimando la señal.

Respecto a la medida de $A = 5,4$ Bq (Tabla 1) al estar la actividad equivalente de la fuente tan próxima a la MDA para alguno de los métodos (tanto para el método 1 como para el método 2 con ventana de 0,5 σ), obtenemos un límite superior de la actividad, ya que el límite crítico es superior al número de cuentas. Para los otros métodos, determinamos un valor de la actividad con su error. Por otro lado, para la medida de $A = 47,5$ Bq, para los cuatro métodos tenemos valores de las actividades con sus errores, como era de esperar para una actividad tan alta. El método 1 da un valor compatible con el valor real de la actividad de la fuente mientras el método 2 nos la sobreestima a unos 10-15 Bq.

Los errores sistemáticos de v son del orden del 4%, siendo la mayor contribución la de la intensidad. Tal y como se muestra en la gráfica (figura 10), la corrección debida a éstos para un 4% es despreciable, como se ve del hecho de que los valores de las tablas apenas se ven ligeramente modificados en las columnas $\sigma_v \neq 0$ respecto de las $\sigma_v = 0$.

4.2. Dependencia de condiciones experimentales

4.2.1. Actividad variable

Como hicimos en el apartado anterior, sumando espectros de ^{137}Cs de distinta duración al espectro de fondo de la figura 3 hemos construido espectros de fondo de $t \approx 21h$ con una fuente de ^{137}Cs de actividades en el rango de 5-50 Bq. Con ellos, utilizaremos ambos métodos, usando en el segundo método únicamente la ventana lateral de $0,5\sigma$, para así poder comparar los resultados obtenidos sin sobrecargar el trabajo de tablas y gráficas.

En la siguiente gráfica (figura 12), se representa la actividad (o el límite de la actividad) estimada por el método 1 frente a la actividad equivalente de la muestra, en adelante actividad de la muestra.

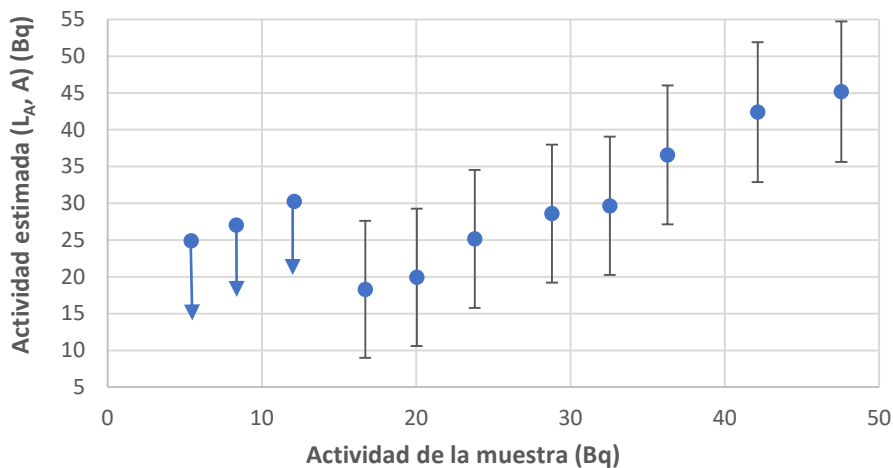


Fig. 12. Relación entre la actividad estimada y la esperada (método 1).

Como podemos observar, las tres primeras medidas corresponden con límites de las actividades, puesto que en estos casos, el límite crítico es mayor que el valor de cuentas netas, N . En cambio, en el resto determinamos un valor de la actividad con su correspondiente error. Es decir, podemos ver cómo en torno a 15 Bq pasamos de dar límites superiores a dar valores de la actividad. Recordemos que la actividad mínima detectable es de 36,5 Bq (véase tablas 1 y 2). Para medidas de tiempos mayores, la actividad o el límite de la actividad también van aumentando, sin embargo, los errores son prácticamente constantes.

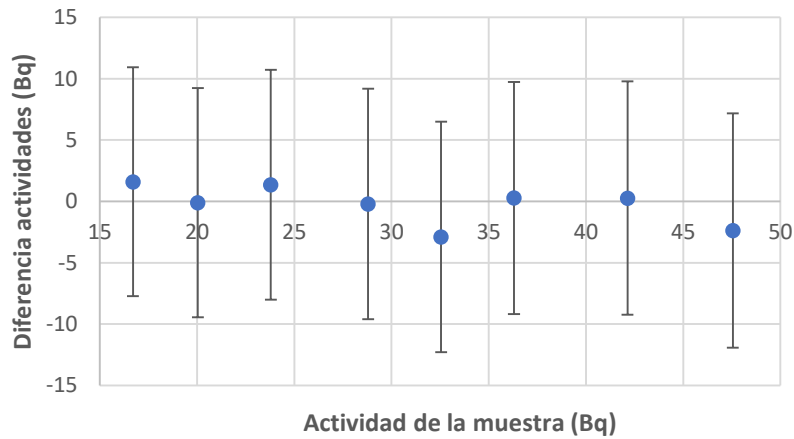


Fig. 13. Actividad real frente a la diferencia de actividades (método 1).

La figura 13 representa la diferencia entre la actividad de la muestra y la actividad estimada, no teniendo en cuenta las medidas de las que obtenemos límites superiores en las actividades (L_A). De esta forma, podemos ver lo que nos separamos de la actividad esperada aplicando este método.

Podemos realizar el promedio de lo que nos separamos para todas las medidas:

$$\text{Diferencia de actividades} = -0,24 \pm 3,33 \text{ Bq}$$

Hemos obtenido un valor compatible con cero como era deseable.

Los resultados obtenidos utilizando el método 2 se muestran en las figuras 14 y 15.

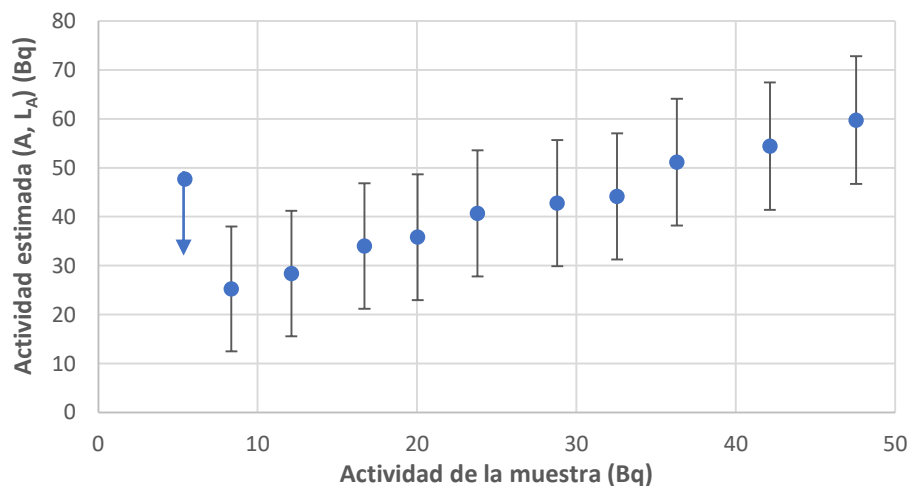


Fig. 14. Relación entre la actividad estimada y la esperada (método 2).

En este caso, solamente para la medida de tiempo más corto tenemos un límite superior de la actividad, teniendo en el resto, valores con sus respectivos errores. Al igual que sucedía para el método anterior, a medida que aumentamos la actividad de la muestra, la actividad estimada va a aumentar. Para este método la actividad mínima detectable es de 50,0 Bq (véase tablas 1 y 2).

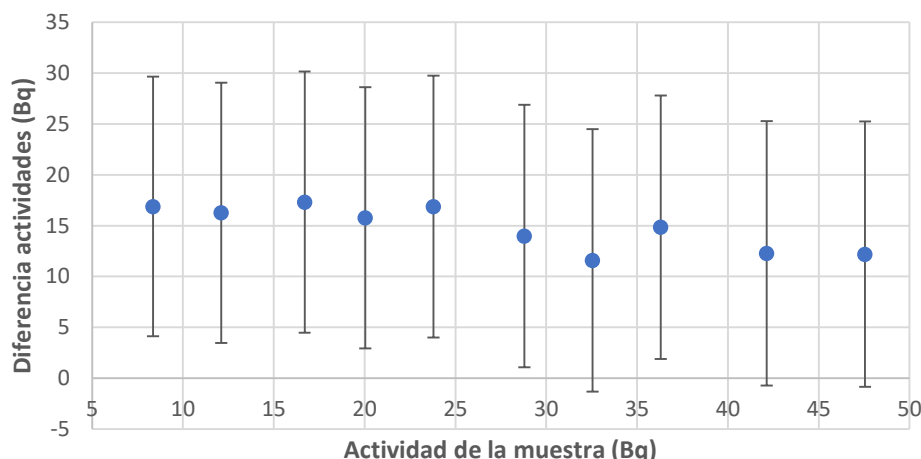


Fig. 15. Actividad real frente a la diferencia de actividades (método 2).

En la figura 15 podemos ver lo que nos desviamos respecto a la actividad esperada. Al realizar el promedio de lo que nos desviamos, obtenemos un valor claramente distinto de cero.

$$\text{Diferencia de actividades} = 14,8 \pm 4,1 \text{ Bq}$$

La ventaja del método 2 es que necesitamos una única medida. Sin embargo, en este caso, encontramos el problema de que posiblemente por la presencia de una especie de escalón en el fondo, estamos subestimándolo y, por tanto, sobreestimando la señal. Esto se traduce en una mayor actividad estimada, de forma que, no corresponde con la actividad real de la muestra. Tenemos un sesgo en nuestras medidas de unos 15 Bq. Utilizando este método la actividad mínima detectable da un valor superior al obtenido mediante el método 1 (50,0 Bq en lugar de 36,5 Bq). La subestimación del fondo nos hace tener también un sesgo de unos 15 Bq en este parámetro.

4.2.2. Tiempo variable

Utilizando la misma técnica de sumar espectros de ^{137}Cs a espectros de fondo con los tiempos adecuados hemos construido espectros de la misma actividad equivalente (actividad de la muestra 174,5 Bq) pero de tiempo distinto (entre 3600 s y 18000 s aproximadamente). Así, podremos observar la evolución de las actividades y límites en función del tiempo de la medida. Para este estudio hemos utilizado únicamente el método 1 en el que podemos obtener el espectro de la medida y del fondo por separado (véase tabla 3).

Tiempo (s)	N (cuentas)	L _C (cuentas)	L _D (cuentas)	Actividad (Bq)	MDA (Bq)
3616	217 ± 64	102,4	207,5	176 ± 52	168,5
7241	421 ± 91	146,5	295,7	171 ± 38	119,9
10864	620 ± 112	179,0	360,7	167 ± 31	97,4
14595	813 ± 128	205,1	412,9	163 ± 27	83,0
18094	1034 ± 143	228,5	459,8	168 ± 24	74,6

Tabla 3. Resultados obtenidos por método 1 para una muestra de 174,5 Bq para distintos tiempos.

A diferencia del caso anterior, en nuestras 5 medidas damos un valor de la actividad con su respectivo error, ya que el límite crítico en todos los casos es inferior al número neto de cuentas (N). Además, podemos comprobar que tanto el límite crítico (L_C) como el límite de detección (L_D) como los errores en el área neta (N) crecen con la raíz del tiempo de medida; en cambio, la actividad mínima detectable (MDA) y el error en la actividad (σ_A) decrecen con la raíz del tiempo de medida.

$$\sigma_N, L_C, L_D \propto \sqrt{t} \qquad \sigma_A, MDA \propto \frac{1}{\sqrt{t}}$$

La figura 15 izquierda representa para las cinco medidas las actividades estimadas con sus respectivos errores. Comprobamos que a mayor tiempo de medida tenemos un menos error en la actividad. Así, para un tiempo infinito, podríamos dar un valor de la actividad prácticamente sin error. En la figura 15 derecha se muestra la dependencia lineal del error en la actividad con $1/\sqrt{t}$, como era de esperar.

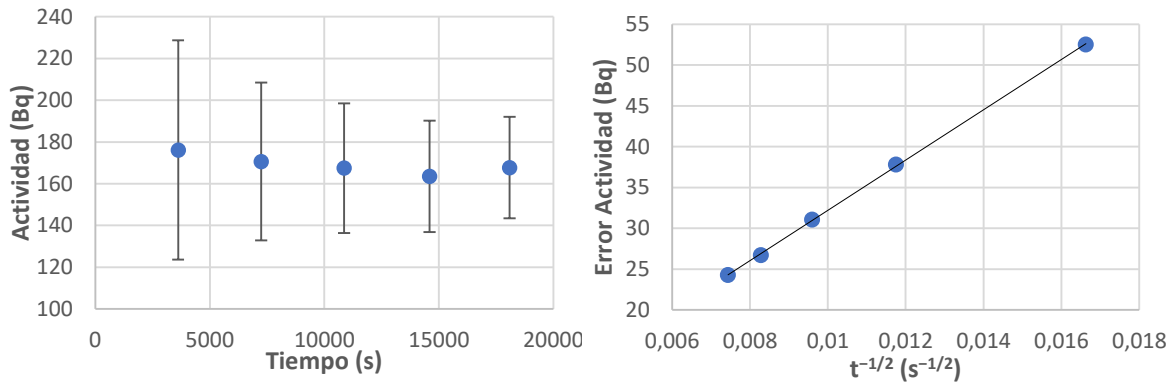


Fig. 16. Dependencia de la actividad y su error frente al tiempo.

La figura 16 izquierda muestra la dependencia tanto del límite crítico (L_C) como del límite de detección (L_D) con la raíz del tiempo, comprobando así que ambos límites aumentan a medida que el tiempo de medida es mayor. En la figura 16 derecha se muestra la dependencia lineal de la MDA con $1/\sqrt{t}$, tal y como ocurre con el error de la actividad (σ_A). Esto nos permite conocer en nuestro detector el tiempo que se necesitaría para observar una determinada actividad con una determinada precisión.

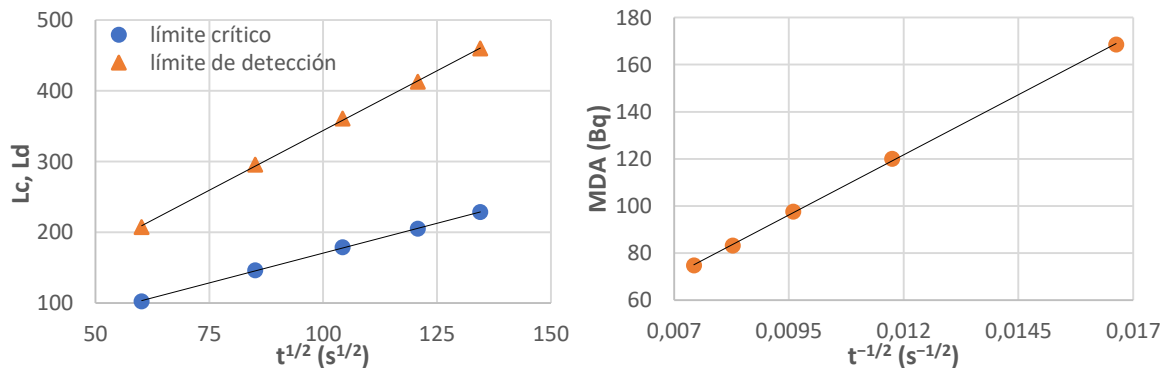


Fig. 17. Izda. Límite crítico y de detección frente al tiempo. Dcha. MDA frente a la inversa de la raíz del tiempo.

4.2.3. Fondo radiactivo variable

En esta última parte, tanto el tiempo de la medida del fondo y de la muestra de ^{137}Cs (74585 s) como la actividad de la misma (5,4 Bq, que corresponde a una señal neta de $N = 138,8$) van a ser fijos, en cambio, el número de cuentas de fondo B va a ser variable. Debido a la dificultad de obtener fondos de distintos órdenes de magnitud en el laboratorio, hemos utilizado técnicas de simulación para generar los distintos espectros de fondo y de medida de la muestra para el correspondiente fondo.

Estas simulaciones las realizaremos mediante Monte Carlo utilizando el método de Box-Müller que consiste en generar dos variables aleatorias e independientes con distribución normal que denotamos por x_1 y x_2 y se pueden determinar mediante las expresiones:

$$x_1 = \sqrt{-2 \ln \xi_1} \cos(2\pi \xi_2) \quad x_2 = \sqrt{-2 \ln \xi_1} \sin(2\pi \xi_2)$$

donde ξ_1 y ξ_2 son números independientes y aleatorios uniformemente distribuidos entre 0 y 1. La media y varianza de esta variable normal x son $\langle x \rangle = 0$, $\text{Var}(x) = 1$.

El objetivo es definir una nueva variable aleatoria con distribución gaussiana que corresponderá con los diferentes fondos B (o con las cuentas en la región de interés con la muestra presente $G=B+N$) que queramos obtener. Para ello, realizamos el cambio:

$$X = B + \sqrt{B} x \quad (X = G + \sqrt{G} x)$$

con media y desviación estándar, respectivamente, B y \sqrt{B} (G y \sqrt{G}).

De esta forma, podemos generar fondos de distintos valores tanto superiores como inferiores al medido en el laboratorio ($B \approx 40000$ cuentas), que se ha utilizado para todos los cálculos de los apartados anteriores.

Con esto, podemos comprobar que la dependencia del fondo con los límites crítico (L_C), superior (L_U) y de detección (L_D), con los errores de la actividad (σ_A) y del número neto de cuentas (N) y con la actividad mínima detectable (MDA) es

$$MDA, \sigma_N, \sigma_A, L_C, L_U, L_D \sim \sqrt{B}$$

Para determinar todos estos parámetros utilizaremos el método 1, a partir de los valores simulados para B y G en la región de interés. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 4.

Fondo (cuentas)	N (cuentas)	L_C (cuentas)	L_U (cuentas)	L_D (cuentas)	A (Bq)	MDA (Bq)
100	148 ± 19	25,1	-	52,9	$5,79 \pm 0,69$	2,1
1000	218 ± 47	72,7	-	148,0	$8,6 \pm 1,6$	5,8
10000	394 ± 142	231,6	-	465,9	$15,4 \pm 4,7$	18,3
100000	279	735,2	1014,5	1473,0	$< 39,8$	57,8
1000000	-408	2327,6	2327,6	4657,8	$< 91,3$	182,6

Tabla 4. Resultados obtenidos por el método 1 para una muestra de 5,4 Bq para distintos fondos.

Las medidas de los dos fondos más altos corresponden con límites en la actividad, debido a que el número neto de cuentas N es inferior al límite crítico, puesto que para valores de B elevados el límite crítico aumenta, no llegando así a detectar la señal de ^{137}Cs .

Los resultados concuerdan con lo que cabría esperar (tablas 1 y 2), en principio, ya que para estas dos medidas más grandes obtenemos límites en la actividad y para el resto tenemos valores de actividades con sus respectivos errores.

Esto nos permite conocer el fondo máximo que puede tener el detector para ser sensible a una determinada actividad.

En la siguiente gráfica (figura 18) se muestra la actividad mínima detectable frente a la raíz del número de cuentas de fondo para observar su dependencia lineal. Lo mismo ocurre con el resto de parámetros determinados en la tabla 4.

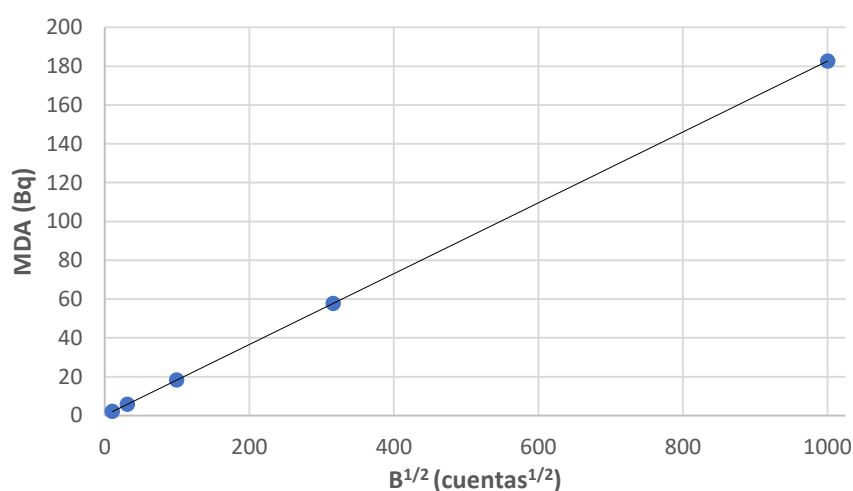


Fig. 18. Dependencia de la MDA frente a la raíz del número de cuentas del fondo.

5. Conclusiones

Hemos comparado distintos métodos para la estimación del área de un pico, de los límites crítico, superior y de detección y de la actividad mínima detectable en un espectrómetro de Ge(Li).

El mejor método es el denominado método 1 puesto que mide directamente el fondo B en la región de interés. Sin embargo, no siempre es posible obtener una medida separada del fondo, por lo que, utilizaríamos el método 2, en principio, usando la ventana de menor anchura ($0,5\sigma$). De esta forma reducimos la posibilidad de que un pico cercano afecte a la estimación de B . No obstante, si el número de sucesos en dicha ventana es pequeño, una ventana más ancha podría ser mejor porque nos reduciría el valor de la varianza de B . Hemos comprobado que este segundo método puede introducir un sesgo en las estimaciones (en nuestro caso sobreestima las actividades, la MDA y los límites). También hemos estudiado la influencia de los errores sistemáticos del factor $\nu = I \varepsilon t \Omega$. En nuestro caso, como los errores sistemáticos son del 4%, dicha influencia es despreciable.

Hemos estudiado como varían nuestros límites y la actividad mínima detectable conforme variamos la actividad de la muestra (al aumentar la actividad pasamos de dar límites a dar valores de actividades), conforme variamos el tiempo de la medida y conforme variamos el fondo del detector. Esto último lo hemos hecho por simulación Monte Carlo. Además, hemos comprobado que los valores obtenidos siguen la dependencia esperada tanto con el tiempo como con el fondo. Conocido el fondo de nuestro detector podemos saber si somos sensibles a una determinada actividad de la muestra y cuánto tiempo necesitaríamos para medirla con una determinada precisión.

A continuación, comentamos algunas posibles continuaciones del trabajo que no se han abordado por falta de tiempo o de medios:

- Mejorar las condiciones experimentales rodeando al detector con un blindaje de ladrillos de plomo para reducir el fondo radiactivo.
- Estudiar la dependencia de la MDA con la energía utilizando otras fuentes radiactivas.
- Utilizar la información individual de cada canal en vez de integrar en ventanas del espectro.

6. Referencias

- [1] GLENN F. KNOLL, *Radiation Detection and Measurement – 3rd edition*, 2000 John Wiley & Sons.
- [2] S.Y.F. CHU, L.P. EKSTRÖM, R.B. FIRESTONE, *The Lund/LBNL Nuclear Data Search – 2nd version*, (1999). (<http://www.nucleardata.nuclear.lu.se/toi/>)
- [3] J. PAULI, G. GUZZI, F. GIRRARDI, A. BORELLA, *Nuclear Instruments & Methods*. 42 (1966) 15.
- [4] GORDON R. GILMORE, *Practical Gamma-ray Spectrometry – 2nd edition*, 2008 John Wiley & Sons.
- [5] LLOYD A. CURRIE, *Analytical Chemistry* 40 (1968) 586.
- [6] L. DONE, M-R. IOAN, *Applied Radiation and Isotopes* 114 (2016) 28.
- [7] J. M. KIRKPATRICK, R. VENKATARAMAN, B.M. YOUNG, *Minimum detectable activity, systematic uncertainties, and the ISO 11929 standard* 296 (2012) 1005.
- [8] J. M. KIRKPATRICK, W. RUSS, R. VENKATARAMAN, B.M. YOUNG, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A* 784 (2015) 306.